

## § 4. Логические операции И и ИЛИ

В 1936—1938 гг. американский инженер и математик Клод Шеннон (1916 — 2001) нашёл применение булевой логике при конструировании схем из реле и переключателей. В дальнейшем это открытие послужило основанием для построения логических элементов, на которых работает компьютерная техника. Состояние элементов компьютера соответствует логическим значениям:

- если сигнал присутствует, получаем логическую 1;
- если сигнал отсутствует, получаем логический 0.

**Пример 4.1.** Проанализируем высказывание «Число 456 трехзначное и четное».

Данное высказывание является составным, поскольку содержит два простых высказывания:

«Число 456 трехзначное» (высказывание  $A$ );

«Число 456 четное» (высказывание  $B$ ).

Высказывания  $A$  и  $B$  соединены вместе логической операцией **И**, в результате получено составное высказывание  $A$  **И**  $B$ . Высказывание  $A$  истинно, высказывание  $B$  истинно. Поэтому высказывание  $A$  **И**  $B$  истинно:  $(A$  **И**  $B) = 1$ .

Логика высказываний позволяет строить составные высказывания. Они создаются из нескольких простых высказываний путем соединения их друг с другом с помощью логических операций **НЕ**, **И**, **ИЛИ** и др.

### 4.1. Логическая операция И

Определение истинности или ложности составного высказывания зависит от того, являются ли истинными или ложными простые высказывания, входящие в его состав, а также от той логической операции, которая их связывает.

Составное высказывание  $A$  **И**  $B$ , образованное в результате объединения двух простых высказываний  $A$  и  $B$  логической операцией **И**, истинно тогда и только тогда, когда  $A$  и  $B$  одновременно истинны.

Если хотя бы одно из простых высказываний, связанных операцией **И**, будет ложным, то и составное высказывание будет ложным (примеры 4.1 и 4.2).

Операцию **И** называют логическим умножением. Равенства

$1 \cdot 1 = 1, 1 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 0, 0 \cdot 0 = 0$ , верные для обычного умножения, верны и для логического умножения.

Представим таблицу истинности для логической операции И:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>A И B</i>
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

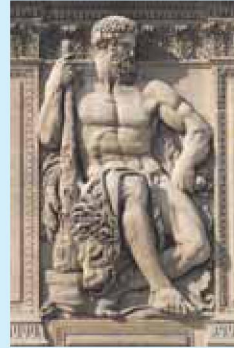
Для записи логической операции И используют следующие обозначения: *A И B*, *A AND B*,  $A \cdot B$ ,  $A * B$ ,  $A \wedge B$ ,  $A \& B$ .

## 4.2. Логическая операция ИЛИ

Составное высказывание *A ИЛИ B*, образованное в результате объединения двух простых высказываний *A* и *B* логической операцией ИЛИ, ложно тогда и только тогда, когда *A* и *B* одновременно ложны.

Другими словами, составное высказывание *A ИЛИ B* будет истинным только в том случае, если истинно хотя бы одно из двух составляющих его простых

**Пример 4.2.** Высказывание *A*: «Геракл — герой древнерусской мифологии». Ложно,  $A = 0$ .



Высказывание *B*: «Геракл — сын бога Зевса». Истинно,  $B = 1$ .

Высказывание *A И B*: «Геракл — герой древнерусской мифологии И сын бога Зевса». Ложно,  $(A И B) = 0$ .

**Пример 4.3.** Проанализируем высказывание «Семиклассники изучают философию или астрономию».

Данное составное высказывание образовано из двух простых:

«Семиклассники изучают философию» (высказывание *A*);

«Семиклассники изучают астрономию» (высказывание *B*).

Высказывания связаны логической операцией ИЛИ. В результате получилось составное высказывание *A ИЛИ B*. Высказывание *A* ложно, высказывание *B* ложно. Поэтому высказывание *A ИЛИ B* ложно:  $(A ИЛИ B) = 0$ .

**Пример 4.4.** Высказывание  $A$ : «Франциск Скорина — белорусский первопечатник». **Истинно**,  $A = 1$ .

Высказывание  $B$ : «Стефан Баторий — турецкий султан». **Ложно**,  $B = 0$ .



Франциск  
Скорина



Стефан  
Баторий

Высказывание «Франциск Скорина — белорусский первопечатник, **ИЛИ** Стефан Баторий — турецкий султан» будет **истинным**,  $(A \text{ ИЛИ } B) = 1$ .

**Пример 4.5\***. Рассмотрим выражение:  $A \text{ ИЛИ } B \text{ И НЕ } C$ . Распишем по действиям вычисление его значения:

- 1)  $D = \text{НЕ } C$ ;
- 2)  $E = B \text{ И } D$ ;
- 3)  $F = A \text{ ИЛИ } E$ .

Значение высказывания  $F$ , полученное в 3-м действии, определит значение исходного логического выражения.

**Пример 4.6\***. Пусть высказывание  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ . Найдем значение логического выражения  $A \text{ ИЛИ } B \text{ И НЕ } C$ .

- 1)  $D = \text{НЕ } C = 1$ ;
- 2)  $E = B \text{ И } D = 0 \text{ И } 1 = 0$ ;
- 3)  $F = A \text{ ИЛИ } E = 1 \text{ ИЛИ } 0 = 1$ .

Значит, при начальных значениях  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$  значение логического выражения  $A \text{ ИЛИ } B \text{ И НЕ } C$  истинно.

высказываний (см. пример 4.3 на с. 27 и пример 4.4).

Таблица истинности для логической операции **ИЛИ**:

$A$	$B$	$A \text{ ИЛИ } B$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

Операцию **ИЛИ** называют **логическим сложением**. Равенства  $1 + 0 = 1$ ,  $0 + 1 = 1$ ,  $0 + 0 = 0$ , верные для обычного сложения, верны и для логического сложения.

Для записи логической операции **ИЛИ** можно использовать следующие выражения:  $A \text{ ИЛИ } B$ ,  $A \text{ OR } B$ ,  $A + B$ ,  $A \vee B$ ,  $A \mid B$ .

Если в логическом выражении присутствует несколько логических операций, то важно определить порядок их выполнения. Наивысшим приоритетом обладает операция **НЕ**. Логическая операция **И**, т. е. логическое умножение, выполняется раньше операции **ИЛИ** — логического сложения (примеры 4.5\* и 4.6\*).

Для изменения порядка выполнения логических операций используют скобки: в этом случае сначала выполняются операции в скобках, а затем — все остальные.

Логические операции **И** и **ИЛИ** подчиняются переместительному закону:

$$A \text{ И } B = B \text{ И } A;$$

$$A \text{ ИЛИ } B = B \text{ ИЛИ } A.$$

Чтобы определить значение составного логического выражения, иногда достаточно знать значение только одного простого высказывания. Так, если в составном высказывании с операцией **И** хотя бы одно простое высказывание является ложным, то значение составного высказывания будет ложным. Если в составном высказывании с операцией **ИЛИ** хотя бы одно простое высказывание истинно, то значение составного высказывания будет истинным (пример 4.7).

**Пример 4.7.** Высказывание *A*: «Прогноз погоды обещает дождь». Высказывание *B*: «Сейчас на улице идет дождь».

Высказывание *A И B* будет ложным, если мы увидели, что на улице нет дождя (независимо от того, что обещал прогноз погоды).

Высказывание *A ИЛИ B* будет истинным, если прогноз погоды обещал дождь (независимо от того, какую погоду мы наблюдаем сейчас).



1. В каких случаях составное высказывание *A И B* может быть истинным?
2. В каких случаях составное высказывание *A ИЛИ B* может быть ложным?



### Упражнения

1. Определите, истинными или ложными являются нижеприведенные составные высказывания.
  1. Мяч круглый, **ИЛИ** Земля плоская.
  2. Кролики — домашние животные, **И** баобаб растет в Беловежской пуще.
  3. Клавиатура — устройство ввода информации, **ИЛИ** мышь — устройство вывода информации.

4. И. А. Крылов написал басню «Квартет», И. М. Ю. Лермонтов написал стихотворение «Парус».
5. Сосна — хвойное дерево, И кедр — не хвойное дерево.
6. Монитор — устройство ввода информации, ИЛИ сканер — НЕ устройство вывода информации.
- 7\*. Континенты и острова — это большие участки суши.

2 О том, как прошли летние каникулы, Кира рассказала своим друзьям следующее:

1. Я была у бабушки в деревне, и рядом с деревней было озеро.
2. По озеру плавала лодка или утка.
3. Мы с бабушкой насобирали малины и смородины.
4. Я составила букет из цветов. В нем были ромашки или гвоздики.

Подготовьте к каждому из высказываний Киры рисунки, учитывая, что все высказывания истинны.

3 Откройте файл с рисунком и разложите грибы по корзинкам так, чтобы было истинным следующее высказывание: «В большой корзине все грибы съедобные, и в маленькой корзине все грибы несъедобные».



4 Откройте файл с рисунком и поставьте все цветы в вазы так, чтобы было истинным высказывание: «В синей вазе все цветы розы, или в красной вазе все цветы не красного цвета».



5\* Найдите значения логических выражений, если  $A = 1$ ,  $B = 1$ ,  $C = 0$ ,  $D = 0$ .

1.  $A$  ИЛИ  $B$  И НЕ  $C$ .
2.  $A$  И НЕ  $B$  ИЛИ  $C$ .
3.  $A$  ИЛИ  $B$  И НЕ ( $C$  И  $D$ ).
4.  $(A$  И  $B)$  ИЛИ НЕ  $C$  И  $(A$  ИЛИ  $B)$  ИЛИ НЕ  $D$ .